

## CHAPITRE VI : MESURES DE HAUSDORFF

Le premier paragraphe est un résumé des connaissances nécessaires en théorie des mesures de Carathéodory pour la compréhension du reste. Nous définissons les mesures de Hausdorff au chapitre 2, et étudions leurs rapports avec les capacités. Nous montrons en particulier que toute mesure de Hausdorff est un calibre, et donnons diverses applications des chapitres précédents. Le paragraphe 3 est consacré à la comparaison des ensembles  $\sigma$ -finis et des ensembles minces pour certaines mesures de Hausdorff. Enfin le paragraphe 4 contient des compléments sur les mesures du "type Hausdorff".

### 1.- MESURES EXTÉRIEURES

Nous supposons toujours que  $E$  est un espace métrisable compact, quoique cela ne soit pas nécessaire pour une bonne partie de ce paragraphe. Nous renvoyons le lecteur à MUNROE [ ] , FEDERER [ ] ou ROGERS [ ] pour les démonstrations.

1 DÉFINITION.- Une mesure extérieure sur  $E$  est une fonction  $M$  sur  $\phi(E)$  satisfaisant les conditions suivantes

- a)  $M(\emptyset) = 0$
- b)  $M$  est croissante : si  $B$  contient  $A$ , on a  $M(B) \geq M(A)$
- c)  $M$  est dénombrablement sous-additive : si  $A$  est contenu dans la réunion d'une suite  $(A_n)$ , on a  $M(A) \leq \sum M(A_n)$ .

Ainsi, la mesure extérieure associée à une "vraie" mesure est une mesure extérieure au sens de cette définition (c'est même une mesure extérieure régulière - voir la définition au n.4). Plus généralement, les capacités fortement sous-additives fournies par le théorème d'extension 15 du chapitre II sont des mesures extérieures, qui sont loin d'être régulières en général.

2 DÉFINITION.- Soit M une mesure extérieure sur E. Une partie A de E est dite M-mesurable si, pour toute partie D, on a

$$M(D) = M(D \cap A) + M(D - A)$$

Etant donnée la sous-additivité de M, il suffit en fait d'avoir l'inégalité  $M(D) \geq M(D \cap A) + M(D - A)$ . L'ensemble des parties mesurables est évidemment stable par passage au complémentaire, et contient tous les ensembles de mesure nulle. Mais, on a beaucoup mieux

3 THÉORÈME.- L'ensemble des parties M-mesurables est une tribu.

La restriction de M à l'ensemble des parties M-mesurables est alors une véritable mesure abstraite. D'autre part, les ensembles M-mesurables constituant un pavage  $\underline{E}$ , on peut montrer que tout ensemble  $\underline{E}$ -analytique est encore M-mesurable (et donc un élément de  $\underline{E}$ )

4 DÉFINITION.- Une mesure extérieure M est dite régulière si elle satisfait la condition suivante : toute partie A de E est contenue dans une partie M-mesurable B telle que l'on ait  $M(A) = M(B)$ .

Le théorème suivant, très facile modulo ce qui précède, jouera un rôle important par la suite

5 THÉORÈME.- Toute mesure extérieure régulière est une précapacité.

Nous passerons une bonne partie de notre temps au paragraphe 2 à démontrer que certaines mesures extérieures non régulières sont encore des précapacités.

Nous allons maintenant faire intervenir la topologie de E.

6 DÉFINITION.- Une mesure extérieure est appelée une mesure de Borel si tous les boréliens sont mesurables.

Le théorème suivant est un cas particulier d'un résultat cité plus haut

7 THÉORÈME.- Soit M une mesure de Borel. Tout ensemble analytique est M-mesurable.

Voici le "critère de Carathéodory", qui donne un moyen commode pour vérifier qu'une mesure extérieure est une mesure de Borel

8 THÉORÈME.- Pour qu'une mesure extérieure M soit de Borel, il faut et il suffit qu'elle satisfasse la condition suivante : si A et B sont deux parties de E ayant leurs adhérences disjointes, alors on a  $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$ .

Terminons ce petit résumé en donnant deux méthodes "classiques" pour construire des mesures extérieures.

9 Nous désignerons par  $\underline{C}$  une classe de parties de E contenant  $\emptyset$  et par  $\alpha$  une fonction sur  $\underline{C}$  telle que  $\alpha(\emptyset) = 0$ . Nous désignerons d'autre part par d une distance sur E compatible avec sa topologie par  $\delta$  la fonction diamètre définie par d (avec la convention  $\delta(\emptyset) = 0$ ).

10 THÉORÈME.- Si, pour toute partie A de E, on pose  $M_\infty^\alpha(A) = \inf \sum \alpha(C_n)$  où  $(C_n)$  parcourt l'ensemble des recouvrements de A par des éléments de  $\underline{C}$ , la fonction  $M_\infty^\alpha$  ainsi définie est une mesure extérieure.

Comme d'habitude, on convient que  $M_\infty^\alpha(A) = +\infty$  s'il n'existe pas de recouvrements de  $A$ . Si, dans cette définition, on restreint  $\underline{C}$  en ne prenant que les éléments de  $\underline{C}$  de diamètre  $\leq t$  ( resp  $< t$  ), on obtient une nouvelle mesure extérieure que nous noterons  $M_t^\alpha$  ( resp  $N_t^\alpha$  ) pour tout  $t > 0$ . Evidemment, on a  $M_t^\alpha \leq N_t^\alpha$  pour tout  $t$ , et les  $M_t^\alpha$  et  $N_t^\alpha$  croissent si  $t$  décroît

11 THÉOREME. - La fonction  $M^\alpha = \sup M_t^\alpha = \sup N_t^\alpha$  est une mesure de Borel, qui est régulière si les éléments de  $\underline{C}$  sont boréliens.

Les mesures de Hausdorff seront construites suivant ce schéma.

## 2.- MESURES DE HAUSDORFF

Désormais,  $E$  est un espace métrique compact, muni d'une distance  $d$ ; la fonction diamètre est notée  $\delta$ , et  $\delta(\emptyset) = 0$  par convention.

12 On désigne par  $\alpha$  une fonction sur  $\underline{K}(E)$  ayant les propriétés suivantes

i) la fonction  $\alpha$  est croissante et continue

ii) on a  $\alpha(\emptyset) = 0$ , et, si  $\alpha(K) = 0$  pour  $K \in \underline{K}(E)$ , alors  $\delta(K) = 0$  et, pour des raisons de commodité, on prolonge  $\alpha$  à  $\phi(E)$  en posant

iii)  $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$  pour tout  $A \in \phi(E)$

Pour tout  $t \in ]0, +\infty]$ , on définit les fonctions  $M_t^\alpha$  et  $N_t^\alpha$  comme ci-dessus.

On a  $M_t^\alpha(A)$  ( resp  $N_t^\alpha(A)$  ) =  $\inf \Sigma \alpha(A_n)$  où  $(A_n)$  est un recouvrement dénombrable de  $A$  par des parties  $A_n$  de  $E$  telles que  $\delta(A_n) \leq t$  ( resp  $\delta(A_n) < t$  ), et où l'inf est pris sur l'ensemble de ces recouvrements. Etant donnée la condition iii), on peut supposer les  $A_n$  quelconques ou compacts (quitte à remplacer  $A_n$  par  $\bar{A}_n$ ). Si les  $A_n$  sont "quelconques", on peut les supposer disjoints et contenus dans  $A$  (quitte à remplacer  $A_n$  par  $A \cap A_n$ ) : les mesures  $M_t^\alpha(A)$  et  $N_t^\alpha(A)$  ne

dépendent donc que de l'espace métrique  $A$ , et non du compact métrique  $E$  dans lequel  $A$  est plongé isométriquement. La condition iii), jointe à i), permet aussi de supposer les  $A_n$  ouverts dans la définition des mesures  $N_t^\alpha$ , quitte à remplacer  $A_n$  par un voisinage ouvert de  $\bar{A}_n$  suffisamment proche de  $\bar{A}_n$ . Nous verrons aux n. 18 et 19 que  $M_\infty^\alpha$  est une capacité et que la famille  $(M_t^\alpha, N_t^\alpha)$  est une projection capacitaire. Pour le moment, bornons nous à rappeler que les  $M_t^\alpha$  et  $N_t^\alpha$  sont des mesures extérieures, et que la fonction  $M^\alpha = \sup M_t^\alpha = \sup N_t^\alpha$  est une mesure de Borel régulière, que nous appellerons la mesure de Hausdorff engendrée par  $\alpha$ .

- 13 EXEMPLE.- Les mesures de Hausdorff classiques sont construites de la manière suivante : on se donne une fonction monotone croissante et continue  $h$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $h(t)$  soit  $> 0$  pour  $t > 0$ , et on prend pour  $\alpha$  la fonction composée  $h \circ \delta$  ; la mesure de Hausdorff  $M^\alpha$  est alors notée  $M^h$  (pour  $h$  constante = 1,  $M^1$  est la mesure de comptage des points ; pour  $h(t) = t^s$ ,  $s \in \mathbb{R}_+$ ,  $M^h$  est la mesure  $s$ -dimensionnelle). La généralisation exposée ici est due à SION et SJERVE [ ], auxquels est emprunté aussi le lemme technique fondamental pour démontrer que les  $M_t^\alpha$  sont des précapacités.

Notons tout de suite à quoi sert la condition ii) du n.12

- 14 THÉORÈME.- Soit  $(K_n)$  une suite de compacts telle que  $\lim \alpha(K_n) = 0$ . Alors on a aussi  $\lim \delta(K_n) = 0$ .

DÉMONSTRATION.- Soit  $a = \limsup \delta(K_n)$ . Quitte à extraire une sous-suite des  $K_n$ , on peut supposer que  $\lim K_n = K$  existe dans  $\underline{\mathbb{K}}(E)$  et que  $\lim \delta(K_n) = a$ . Comme  $\alpha$  et  $\delta$  sont continues sur  $\underline{\mathbb{K}}(E)$ , on a  $\alpha(K) = 0$ , donc  $\delta(K) = 0$  et donc  $a = 0$ .

Une conséquence importante de ce petit lemme :

15 THÉORÈME.- Soit A une partie de E. Pour que  $M^\alpha(A) = 0$ , il faut et il suffit que  $M_\infty^\alpha(A) = 0$ .

DÉMONSTRATION.- La condition nécessaire est triviale. Supposons donc que  $M_\infty^\alpha(A) = 0$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , soit  $(K_n^\epsilon)$  un recouvrement de A par des compacts tels que  $\sum \alpha(K_n^\epsilon) \leq \epsilon$ . Pour  $\epsilon$  fixé, on a  $\lim \alpha(K_n^\epsilon) = 0$  et donc  $\lim \delta(K_n^\epsilon) = 0$  : il existe un entier  $n_\epsilon$  tel que  $\delta(K_{n_\epsilon}^\epsilon) = \sup_n \delta(K_n^\epsilon)$ . Mais on a aussi  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha(K_{n_\epsilon}^\epsilon) = 0$  et donc aussi  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(K_{n_\epsilon}^\epsilon) = 0$ . Donc, pour  $t > 0$  fixé, les  $K_n^\epsilon$  sont de diamètre  $\leq t$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit, et ainsi  $M_t^\alpha(A) = 0$  pour tout  $t > 0$ .

Voici maintenant le lemme technique fondamental pour l'étude des propriétés capacitaires des mesures  $M_t^\alpha$

16 THÉORÈME.- Soit, pour tout entier p, une suite de compacts  $K^p = (K_n^p)$ . Il existe alors une suite de compacts  $K = (K_n)$  satisfaisant les conditions suivantes

- a)  $\delta(K_n) \leq \lim_p \sup \delta(K_n^p)$  pour tout n
- b)  $\sum_n \alpha(K_n) + \lim_p \inf M^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_n K_n] \leq \lim_p \inf \sum \alpha(K_n^p)$

DÉMONSTRATION.- Commentons d'abord un peu l'énoncé. Supposons que, pour chaque p,  $(K_n^p)$  soit un recouvrement d'un ensemble A : on voudrait pouvoir définir un recouvrement limite quand p tend vers l'infini. Ce n'est pas tout à fait possible, mais les  $K_n$  en forment presque un : la condition b) nous donne une estimation précise de la mesure  $M^\alpha[A - \bigcup_n K_n]$ . Passons à la démonstration. Nous allons commencer par simplifier la situation par étapes. D'abord, il suffit de considérer le cas où  $\lim_p \inf \sum \alpha(K_n^p)$  est fini. Et,

quitte à extraire une sous-suite de  $(K_n^p)$ , on peut supposer que

$$\lim_p \Sigma \alpha(K_n^p) = a < +\infty$$

existe. Pour  $p$  fixé, on a  $\lim_n \alpha(K_n^p) = 0$  et donc  $\lim_n \delta(K_n^p) = 0$  :

quitte à réarranger la suite  $(K_n^p)$ , on peut supposer que la suite  $(\delta(K_n^p))$  est décroissante. Enfin, quitte à extraire en cascade

des sous-suites de  $(K_n^p)$  et à prendre la sous-suite diagonale,

on peut supposer que, pour chaque  $n$ , la suite  $(K_n^p)$  converge

dans  $\underline{K}(E)$  vers un compact  $K_n$ . Comme  $\alpha$  est continue, on a

$\alpha(K_n) = \lim_p \alpha(K_n^p)$ , et il résulte du lemme de Fatou que  $b = \Sigma \alpha(K_n)$

est majoré par  $a$ . D'autre part, on a aussi  $\delta(K_n) = \lim_p \delta(K_n^p)$ ,

et nous allons montrer que l'on a

$$\lim_p \sup M^\alpha [ \cup K_n^p - \cup K_n ] \leq a - b$$

Ainsi  $(K_n)$  satisfait les conditions du théorème (on a une "lim sup"

dans a) et une "lim inf" dans b) parce qu'on travaille en réalité

sur une sous-suite de  $(K_n^p)$ ). Nous allons d'abord montrer que

$$\lim_p \sup M^\alpha [ \cup K_n^p - \cup V_n ] \leq a - b$$

lorsque  $(V_n)$  est une suite d'ouverts telle que  $V_n$  contienne  $K_n$

pour tout  $n$  (ce résultat est par ailleurs suffisant pour montrer

que  $M_\infty^\alpha$  est une capacité et que  $M^\alpha$  est un calibre). Soit  $\epsilon > 0$  :

il existe des entiers  $n_0$  et  $p_0$  tels que

$$(1) \Sigma \alpha(K_n) \leq \epsilon \text{ pour } n \geq n_0$$

$$(2) K_n^p \subset V_n \text{ pour } p \geq p_0 \text{ et } n = 1, 2, \dots, n_0$$

$$(3) \Sigma_n \alpha(K_n^p) \leq a + \epsilon \text{ pour } p \geq p_0$$

$$(4) |\alpha(K_1^p) - \alpha(K_1)| + |\alpha(K_2^p) - \alpha(K_2)| + \dots + |\alpha(K_{n_0}^p) - \alpha(K_{n_0})| \leq \epsilon$$

pour  $p \geq p_0$

De la condition (2), il résulte que, pour  $p \geq p_0$ , on a

$$\cup_n K_n^p - \cup_{n \leq n_0} V_n \subset \cup_{n > n_0} K_n^p$$

Si  $t > 0$  est tel que  $\delta(K_n^p) \leq t$  pour tout  $p \geq p_0$  et tout  $n \geq n_0$ , on a

$$M_t^\alpha [ \cup_n K_n^p - \cup_n V_n ] \leq M_t^\alpha [ \cup_n K_n^p - \cup_{n \leq n_0} V_n ] \leq \sum_{n > n_0} \alpha(K_n^p) \leq (a - b) + 3\epsilon$$

la dernière inégalité résultant de l'égalité

$\sum_{n \gg n_0} \alpha(K_n^p) = \sum_n \alpha(K_n^p) - \sum_n \alpha(K_n) + \sum_{n \leq n_0} \alpha(K_n) - \sum_{n \leq n_0} \alpha(K_n^p) + \sum_{n \gg n_0} \alpha(K_n)$   
 et des conditions (1), (3) et (4). Maintenant, pour  $t > 0$  fixé, on peut supposer  $n_0$  suffisamment grand pour que  $\delta(K_{n_0}) < t$ , puis  $p_0$  suffisamment grand pour que  $\delta(K_{n_0}^p) \leq t$  pour  $p \gg p_0$ . Comme la suite  $(\delta(K_n^p))$ ,  $p$  fixé, est décroissante, on a dans ces conditions  $\delta(K_n^p) \leq t$  pour tout  $p \gg p_0$  et tout  $n \gg n_0$ , et donc

$$M_t^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_n V_n] \leq a - b + 3\epsilon$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre  $t$  vers 0 puis  $\epsilon$  vers 0 pour obtenir  $\lim_p \sup M^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_n V_n] \leq a - b$ . La dernière étape va faire intervenir le fait que  $M^\alpha$  est une mesure régulière, et donc une précapacité. Pour  $n_0$  fixé et pour  $n = 1, 2, \dots, n_0$ , faisons décroître l'ouvert  $V_n$  vers  $K_n$ . La mesure  $M^\alpha$  étant une précapacité, pour  $p$  fixé,  $M^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_{n \leq n_0} V_n - \bigcup_{n \gg n_0} V_n]$  croît vers  $M^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_{n \leq n_0} K_n - \bigcup_{n \gg n_0} V_n]$ . On en déduit que, pour tout entier  $n_0$ , on a

$$\lim_p \sup M^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_{n \leq n_0} K_n - \bigcup_{n \gg n_0} V_n] \leq a - b$$

Soient maintenant  $\epsilon > 0$  et  $t > 0$ , et choisissons l'entier  $n_0$  et les ouverts  $(V_n)$  de sorte que  $\delta(V_n) \leq t$  pour  $n \gg n_0$  et  $\sum_{n \gg n_0} \alpha(V_n) \leq \epsilon$  (la possibilité de ce choix résulte aisément de la convergence de la série  $\sum \alpha(K_n)$ ). On a alors, pour  $p$  fixé,

$$M_t^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_n K_n] \leq M_t^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_{n \leq n_0} K_n], \text{ et, } M_t^\alpha \text{ étant sous-additive,}$$

$$M_t^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_{n \leq n_0} K_n] \leq M_t^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_{n \leq n_0} K_n - \bigcup_{n \gg n_0} V_n] + M_t^\alpha(\bigcup_{n \gg n_0} V_n)$$

$$\leq M^\alpha[\dots\dots\dots] + \sum_{n \gg n_0} \alpha(V_n)$$

et donc on a  $M_t^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_n K_n] \leq a - b + 2\epsilon$  pour  $p$  suffisamment grand. Il ne reste plus qu'à faire tendre  $t$  vers 0, puis  $\epsilon$  vers 0 pour obtenir  $\lim_p \sup M^\alpha[\bigcup_n K_n^p - \bigcup_n K_n] \leq a - b$ .



17 COROLLAIRE.- Soit, pour tout entier p, une suite de compacts  $(K_n^p)$ . Il existe alors une suite de compacts  $(K_n)$  satisfaisant les conditions suivantes

a)  $\delta(K_n) \leq \lim_p \sup \delta(K_n^p)$  pour tout n

b) si A est une partie de E contenue dans  $\lim_p \inf (\bigcup_n K_n^p)$ , on a

$$\sum_n \alpha(K_n) + M^\alpha[A - \bigcup_n K_n] \leq \lim_p \inf \sum \alpha(K_n^p)$$

DÉMONSTRATION.- On peut évidemment supposer que  $A = \lim_p \inf (\bigcup_n K_n^p)$ , et le corollaire sera prouvé si l'on montre que l'on peut intervertir "lim inf" et " $M^\alpha$ " dans le b) du théorème 16. Or,  $M^\alpha$  étant une précapacité, satisfait le lemme de Fatou : pour toute suite  $(A_n)$ , on a  $M^\alpha[\lim \inf A_n] \leq \lim \inf M^\alpha(A_n)$ . D'où la conclusion.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème qui va nous permettre d'appliquer aux mesures de Hausdorff les résultats des chapitres précédents

18 THÉORÈME.- La famille  $(M_t^\alpha, N_t^\alpha)$  est une projection capacitaire.

DÉMONSTRATION.- Nous allons reprendre dans l'ordre les propriétés d'une projection capacitaire pour les rappeler au lecteur.

a) pour t fixé, si A est contenu dans B, on a évidemment

$$M_t^\alpha(A) \leq M_t^\alpha(B) \quad \text{et} \quad N_t^\alpha(A) \leq N_t^\alpha(B)$$

b) pour t fixé, si  $(A_p)$  est une suite croissante, alors

$$M_t^\alpha(\bigcup A_p) = \sup M_t^\alpha(A_p)$$

Comme E est compact, les fonctions  $M_t^\alpha$  et  $N_t^\alpha$  sont finies. Pour p fixé, soit  $(K_n^p)$  un recouvrement de  $A_p$  par des compacts de diamètre  $\leq t$  tel que  $\sum_n \alpha(K_n^p) \leq M_t^\alpha(A_p) + 2^{-p}$ , et appliquons le n.17. Comme  $A = \bigcup_p A_p$  est contenu dans  $\lim_p \inf (\bigcup_n K_n^p)$ , on a

$$M_t^\alpha(A) \leq M_t^\alpha(\cup K_n) + M_t^\alpha(A - \cup K_n) \leq \Sigma \alpha(K_n) + M^\alpha(A - \cup K_n) \\ \leq \liminf_p \Sigma_n \alpha(K_n^p) = \sup_p M_t^\alpha(A_p)$$

et l'inégalité inverse est évidente.

c) pour  $t$  fixé, si  $(K_p)$  est une suite décroissante de compacts,

$$N_t^\alpha(\cap K_p) = \inf N_t^\alpha(K_p)$$

Posons  $K = \cap K_p$ . La mesure  $N_t^\alpha(K)$  est égale à  $\inf \Sigma \alpha(V_n)$ , où  $(V_n)$  est un recouvrement dénombrable par des ouverts de diamètre  $< t$ .

Mais, pour  $(V_n)$  fixé, il existe un entier  $p_0$  tel que  $K_p$  soit contenu dans  $\cup V_n$  pour  $p \geq p_0$ . D'où la conclusion.

d) pour  $t$  fixé, et  $K$  compact,  $N_t^\alpha(K)$  est une fonction analytique puisque c'est une constante !

e) pour  $A$  fixé, les fonctions  $t \rightarrow M_t^\alpha(A)$  et  $t \rightarrow N_t^\alpha(A)$  sont monotones décroissantes (ce qui est évident), et, pour tout  $t$ ,

$$M_t^\alpha(A) = \lim_{s \rightarrow t} N_s^\alpha(A) \quad N_t^\alpha(A) = \lim_{s \rightarrow t} M_s^\alpha(A)$$

Démontrons d'abord la seconde égalité, qui est plus simple. On a évidemment  $N_t^\alpha(A) \leq M_s^\alpha(A)$  pour  $s < t$ . D'autre part, si  $(K_n)$  est un recouvrement de  $A$  par des compacts de diamètre  $< t$  tel que  $\Sigma \alpha(K_n) \leq N_t^\alpha(A) + \epsilon$ , on a  $\lim \alpha(K_n) = 0$ , donc  $\lim \delta(K_n) = 0$  : ainsi, il existe  $s < t$  tel que  $\delta(K_n) \leq s$  pour tout  $n$ , et alors on a  $M_s^\alpha(A) \leq \Sigma \alpha(K_n) \leq N_t^\alpha(A) + \epsilon$ . Démontrons maintenant la première égalité. Etant donnée la seconde, tout revient à montrer que la fonction  $t \rightarrow M_t^\alpha(A)$  est continue à droite. Fixons  $t$ , et soit  $(t_p)$  une suite décroissante convergeant vers  $t$ . Pour  $p$  fixé, désignons par  $(K_n^p)$  un recouvrement de  $A$  par des compacts de diamètre  $< t_p$  tel que  $\Sigma \alpha(K_n^p) \leq M_{t_p}^\alpha(A) + 2^{-p}$ . Et appliquons de nouveau le n.17 : on a comme ci-dessus  $M_t^\alpha(A) \leq \Sigma \alpha(K_n) + M^\alpha(A - \cup K_n) \leq \inf_p M_{t_p}^\alpha(A)$ . Et l'inégalité inverse est évidente.

19 COROLLAIRE.- La mesure extérieure  $M_\infty^\alpha$  est une capacité, et les ensembles de capacité nulle pour  $M_\infty^\alpha$  coïncident avec les ensembles de mesure nulle pour  $M^\alpha$ .

DÉMONSTRATION.- La seconde partie est une reformulation du n.15; la première résulte du théorème précédent,  $M_t^\alpha$  étant égal à  $N_t^\alpha$  pour  $t > \delta(E)$ .

Une limite croissante de calibres étant encore un calibre, on a d'après le théorème 16 du chapitre IV

20 THÉORÈME.- La mesure de Hausdorff  $M^\alpha$  est un calibre.

et donc, d'après le théorème 11 du chapitre III

21 COROLLAIRE.- Soient  $F$  un espace métrisable compact, et  $A$  une partie analytique du produit  $E \times F$ . La fonction  $y \rightarrow M^\alpha[A(y)]$ , où  $A(y)$  est la coupe de  $A$  suivant  $y$ , est analytique sur  $F$ .

Une autre conséquence du théorème 20 :

22 COROLLAIRE.- Soit  $A$  une partie analytique de  $E$ . Alors

$$M^\alpha(A) = \sup M^\alpha(K), K \subset A, K \in \underline{K}(E)$$

Passons maintenant aux conséquences du n.19 : les ensembles analytiques  $\sigma$ -finis pour  $M^\alpha$  sont évidemment  $\sigma$ -finis pour la capacité  $M_\infty^\alpha$ , et donc on a, d'après le théorème 18 du chapitre V

23 THÉORÈME (de Davies).- Soit  $A$  une partie analytique de  $E$ . Si  $A$  n'est pas  $\sigma$ -fini pour  $M^\alpha$ , alors  $A$  contient un compact  $K$  qui n'est pas  $\sigma$ -fini pour  $M^\alpha$ .

On trouvera une version plus forte de ce théorème dans SION et SJERVE [ ], qui montrent en particulier que, si l'ensemble analytique  $A$  n'est pas  $\sigma$ -fini pour  $M^\alpha$ , alors il existe une autre

mesure de Hausdorff  $M^\beta$  telle que  $A$  ne soit pas  $\sigma$ -fini pour  $M^\beta$  tandis que tout ensemble  $\sigma$ -fini pour  $M^\alpha$  est de mesure nulle pour  $M^\beta$ .

Etant donnée le n.19, un ensemble analytique a une épaisseur  $>0$  si et seulement s'il contient les éléments d'une famille non dénombrable d'ensembles analytiques disjoints de mesure  $>0$  pour  $M^\alpha$ .

De la remarque du n.12 du chapitre V, il résulte

24 THÉORÈME.- Un ensemble analytique d'épaisseur  $>0$  contient un compact égal à la réunion d'une famille "continue" de compacts disjoints d'épaisseur  $>0$ .

Dans le cas d'un ensemble compact, ce théorème est dû à DAVIES [ ], auquel nous avons emprunté l'idée pour démontrer que la précapacité épaisseur est dichotomique.

Et l'on a, d'après le théorème 13 du chapitre V,

25 THÉORÈME.- Soient  $F$  un espace métrisable compact, et  $A$  une partie analytique du produit  $Ex^F$ . L'ensemble des  $y \in F$  tels que la coupe  $A(y)$  ait une épaisseur  $>0$  est analytique dans  $F$ .

REMARQUE.- Ce théorème étend aux mesures de Hausdorff le théorème de Mazurkiewicz-Sierpinski pour la mesure du comptage des points. Dans le même ordre d'idées, la conjecture suivante, qui généraliserait le théorème de Souslin-Lusin-Braun pour la mesure du comptage des points, semble raisonnable, quoique sans doute très difficile à établir : si  $B$  est un borélien de  $Ex^F$  tel que la coupe  $B(y)$  soit mince pour  $M^\alpha$  pour tout  $y \in F$ , alors la fonction  $y \rightarrow M^\alpha[B(y)]$  est borélienne sur  $F$  (on sait qu'elle est analytique d'après le n.21).

3. - ENSEMBLES MINCES ET ENSEMBLES  $\sigma$ -FINIS

Voici d'abord un théorème facile, qu'on pourrait formuler plus généralement en comparant deux hordes d'ensembles minces pour une capacité

26 THÉORÈME.- Soit  $M^\alpha$  une mesure de Hausdorff. Si tout compact mince de mesure  $> 0$  contient un ensemble analytique  $\sigma$ -fini de mesure  $> 0$ , tout ensemble mince est  $\sigma$ -fini.

DÉMONSTRATION.- D'après le théorème 16 du chapitre V, tout ensemble mince est contenu dans la réunion d'une suite de compacts minces et d'un ensemble de mesure nulle. Il suffit donc de considérer les cas d'un compact mince  $K$  de mesure  $> 0$ . Soit alors  $\mathcal{K}$  l'ensemble des familles de compacts disjoints,  $\sigma$ -finis et de mesure  $> 0$  contenus dans  $K$  : cet ensemble n'est pas vide d'après l'hypothèse et le n.22, et est inductif pour l'inclusion; d'autre part, tout élément de  $\mathcal{K}$  est dénombrable puisque  $K$  est mince. Soit  $(K_n)$  un élément maximal : d'après l'hypothèse et le n.22, l'ensemble  $K - (\cup K_n)$  est de mesure nulle. En effet, sinon,  $K - (\cup K_n)$  contiendrait un compact, mince, de mesure  $> 0$ , et  $(K_n)$  ne pourrait être un élément maximal. Il est alors clair que  $K$  est  $\sigma$ -fini.

Il est probable que les ensembles minces sont toujours  $\sigma$ -finis. Nous allons voir que c'est le cas si  $E$  est un compact d'un espace euclidien et si  $\alpha$  est de la forme  $h \circ \delta$  (cf le n.13). Nous renvoyons le lecteur à ROGERS [ ] pour une étude systématique des mesures extérieures définies par des "réseaux" et des conditions de validité plus larges du théorème suivant.

27 THÉOREME (de Besicovitch).- Soit  $E$  un compact d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  et supposons  $\alpha$  de la forme  $h \cdot \delta$ . Si  $M^h(E)$  est  $> 0$ , il existe un compact  $K$  de  $E$  tel que l'on ait  $0 < M^h(K) < +\infty$ .

DÉMONSTRATION.- On va en fait travailler avec une autre mesure de Borel régulière, construite à partir d'un "réseau", et "équivalente" à  $M^h$  (les mots entre guillemets vont être précisés par la suite). Mais, avant, on va simplifier un peu les choses. Nous allons montrer que l'on peut supposer  $M^h(E \cap P) = 0$  pour tout hyperplan  $P$  de  $\mathbb{R}^d$ . En effet, sinon, il existe un hyperplan  $P$  tel que  $M^h(E \cap P) > 0$ , et, quitte à remplacer  $E$  par  $E \cap P$ , on peut se placer dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ . En itérant le procédé, on aboutit soit à un compact  $E'$  dans  $\mathbb{R}^{d'}$  avec  $E' \subset E$ ,  $d' \leq d$ , tel que  $M^h(E') > 0$  et  $M^h(E' \cap P) = 0$  pour tout hyperplan  $P$  de  $\mathbb{R}^{d'}$  (cas où  $h(0) = 0$ ), soit à un point  $x$  de  $E$  de mesure  $M^h(\{x\}) = h(0) < +\infty$  (cas où  $h(0) > 0$ ).

Passons maintenant à la construction du réseau et des mesures extérieures associées. D'abord, le compact  $E$  est contenu dans un cube compact  $C^0$  dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées de  $\mathbb{R}^d$ . Soient alors  $\underline{H}_0$  l'ensemble ayant  $C^0$  pour seul élément,  $\underline{H}_1$  l'ensemble des  $2^d$  cubes compacts  $C^1$  obtenus en divisant les arêtes de  $C^0$  par 2, et, de manière générale si  $\underline{H}_k$  est défini, soit  $\underline{H}_{k+1}$  l'ensemble des  $2^d \cdot 2^{kd}$  cubes compacts  $C^{k+1}$  obtenus en divisant par 2 les arêtes de chacun des  $2^{kd}$  cubes compacts  $C^k$  de  $\underline{H}_k$ . On définit alors des mesures extérieures suivant le procédé du n.10. Plus précisément, nous poserons, pour tout entier  $r$  et tout  $A \subset C^0$ ,  $\Delta_r(A) = \inf \sum \alpha(C_n)$  où  $(C_n)$  est un recouvrement de  $A$  par des cubes appartenant à  $\bigcup_{k \geq r} \underline{H}_k$  (soit, encore, par des cubes du réseau de diamètre  $\leq 2^{-r} \delta(C^0)$ ), et où l'inf est pris sur l'ensemble de ces

recouvrements, et nous poserons  $\Delta(A) = \sup \Delta_r(A)$ .

Notons d'abord que  $\Delta$  (resp  $\Delta_0$ ) est équivalente à  $M^h$  (resp  $M_\infty^h$ ) au sens précis suivant : pour  $A \subset C^0$ , on a

$$M_\infty^h(A) \leq \Delta_0(A) \leq 2^{2d} \cdot M_\infty^h(A)$$

$$M^h(A) \leq \Delta(A) \leq 2^{2d} \cdot M^h(A)$$

(c'est ici qu'intervient d'une manière essentielle le fait que  $E$  soit de dimension fini. Les inégalités de gauche sont triviales. Celles de droite résultent aisément du fait que tout ensemble  $B \subset C^0$  tel que  $2^{-(k+1)} \cdot \delta(C^0) < \delta(B) \leq 2^{-k} \cdot \delta(C^0)$  est contenu dans la réunion de moins de  $2^d$  membres de  $\underline{H}_k$  et donc dans celle de moins de  $2^{2d}$  membres de  $\underline{H}_{k+1}$ . Par exemple, pour  $M_\infty^h$ , soient  $\epsilon > 0$  et  $(A_n)$  un recouvrement de  $A$  par des parties de  $C^0$  tel que  $M_\infty^h(A) + \epsilon > \sum \alpha(A_n)$ ; on peut supposer  $\delta(A_n) > 0$  pour tout  $n$ , quitte à remplacer  $A_n$  par un voisinage suffisamment petit. Chaque  $A_n$  est alors contenu dans la réunion de moins de  $2^{2d}$  cubes du réseau de diamètre inférieur à celui de  $A_n$ , et donc  $\Delta_0(A) \leq 2^{2d} \sum h[\delta(A_n)] \leq 2^{2d} (M_\infty^h(A) + \epsilon)$ . Il ne reste plus qu'à faire tendre  $\epsilon$  vers 0.

Nous avons supposé que  $M^h(E \cap P) = 0$  pour tout hyperplan  $P$ . Nous allons encore simplifier un peu la situation en supposant que l'on a  $E \cap P = \emptyset$  pour tout hyperplan  $P$  contenant une face d'un cube du réseau. Cela est possible, car, si  $(P_n)$  est une énumération des hyperplans engendrés par les faces des cubes du réseau, on a  $M^h(E - \cup P_n) = M^h(E) > 0$ , et, si  $E \cap (\cup P_n)$  n'est pas vide, on peut remplacer  $E$  par un compact contenu dans  $E - \cup P_n$  d'après le n.22. Cela étant, les mesures  $\Delta_r$  ont les trois propriétés suivantes

i) si on a  $A \subset E$  et  $k \leq r$ , alors  $\Delta_r(A) = \sum \Delta_r(A \cap C^k)$  où  $C^k$  parcourt les cubes de  $\underline{H}_k$ . En effet, tout recouvrement de  $A$  par des

cubes appartenant à  $\bigcup_{s \geq r} H_s$  se "partitionne" en recouvrements des  $A \cap C^k$  : d'où  $\Delta_r(A) \geq \sum \Delta_r(A \cap C^k)$ , et l'inégalité inverse est évidente.

ii) si on a  $A \subset E$  et  $\Delta_{k+1}(A \cap C^k) \leq \alpha(C^k)$  pour tout  $C^k \in H_k$ , alors

$$\Delta_{k+1}(A) = \Delta_k(A)$$

En effet, d'après i), il suffit de vérifier que  $\Delta_{k+1}(A \cap C_k)$  est égal à  $\Delta_k(A \cap C^k)$  pour tout  $C^k \in H_k$ . Or le seul recouvrement "intéressant" de  $A \cap C^k$  permis pour  $\Delta_k$ , mais non permis pour  $\Delta_{k+1}$ , est celui composé par  $C^k$  tout seul : si on a  $\Delta_{k+1}(A \cap C^k) \leq \alpha(C^k)$ , on a  $\Delta_{k+1}(A \cap C^k) \leq \Delta_k(A \cap C^k)$ , et l'inégalité inverse est évidente.

iii) si  $(K_n)$  est une suite décroissante de compacts de  $E$ , alors  $\Delta_r(\cap K_n) = \inf \Delta_r(K_n)$  pour tout entier  $r$ . En effet, pour les parties incluses dans  $E$ , on peut remplacer les cubes du réseau par leurs intérieurs dans les recouvrements, et un ouvert contenant  $\cap K_n$  contient  $K_n$  pour  $n$  suffisamment grand.

Maintenant, supposons que nous puissions construire par récurrence une suite décroissante  $(K_k)$  de compacts de  $E$  telle que  $K_0 = E$  et

$$\Delta_{k+1}(K_{k+1} \cap C^k) = \Delta_k(K_k \cap C^k) \text{ pour tout } C^k \in H_k$$

De i), il résulte que

$$\Delta_{k+1}(K_{k+1}) = \Delta_k(K_k) = \dots = \Delta_0(K_0)$$

et de ii), que

$$\Delta_{k+1}(K_{k+1}) = \Delta_k(K_{k+1}) = \dots = \Delta_0(K_{k+1})$$

car, pour  $r \leq k$ , on a  $\Delta_{r+1}(K_{k+1} \cap C^r) \leq \Delta_{r+1}(K_{r+1} \cap C^r) = \Delta_r(K_r \cap C^r)$  et  $\Delta_r(K_r \cap C^r) \leq \alpha(C^r)$  pour tout  $C^r \in H_r$ .

Posons alors  $K = \cap K_k$  : on a  $\Delta(K) = \lim \Delta_k(K) \leq \lim \Delta_k(K_k) = \Delta_0(K_0)$ , et, d'après iii),  $\Delta_0(K) = \lim \Delta_0(K_k) = \Delta_0(K_0)$ , et donc, finalement, on a  $\Delta(K) = \Delta_0(K) = \Delta_0(E)$ . Etant donnée l'équivalence de  $M^h$  (resp  $M_\infty^h$ )



et de  $\Delta$  (resp  $\Delta_0$ ), on a alors  $0 < M^h(K) < +\infty$ .

Il ne nous reste plus qu'à construire par récurrence une suite décroissante  $(K_k)$  de compacts de  $E$  telle que  $K_0 = E$  et

$$\Delta_{k+1}(K_{k+1} \cap C^k) = \Delta_k(K_k \cap C^k) \text{ pour tout } C^k \in \underline{H}_k$$

Comme on a évidemment  $\Delta_k(K_k \cap C^k) \leq \Delta_{k+1}(K_k \cap C^k)$ , la construction par récurrence sera possible si nous démontrons la chose suivante :

soient  $r$  un entier et  $K$  un compact de  $E$ ; pour tout  $t \in [0, \Delta_r(K)]$ ,

il existe un compact  $L \subset K$  tel que  $\Delta_r(L) = t$ . Et cela résulte du

fait que la fonction  $s \rightarrow \Delta_r[K \cap \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 \leq s\}]$ , où  $x_1$  est la première coordonnée de  $x$  et  $s$  est réel, est continue : elle est croissante, continue à droite d'après iii), et continue à gauche.

Vérifions ce dernier point. Fixons  $s$ ; comme  $\Delta_r[K \cap \{x : x_1 = s\}] = 0$

( $M^h(K \cap P)$ , et donc  $\Delta(K \cap P)$ , étant nul pour tout hyperplan  $P$ ), il

existe, pour  $\epsilon > 0$  fixé, un recouvrement de  $K \cap \{x : x_1 = s\}$  par

des cubes  $C_n$  du réseau tel que  $C_n$  appartienne à  $\bigcup_{k \geq r} \underline{H}_k$  pour tout  $n$

et que  $\sum \alpha(C_n) \leq \epsilon$ . Mais, les intérieurs des  $C_n$  forment aussi un

recouvrement de  $K \cap \{x : x_1 = s\}$ , le compact  $K$  ne rencontrant pas

les hyperplans des faces des cubes, et donc les  $C_n$  forment aussi

un recouvrement de  $K \cap \{x : s - \eta \leq x_1 \leq s\}$  pour  $\eta > 0$  suffisamment petit

On a alors  $\Delta_r[K \cap \{x : x_1 \leq s\}] \leq \Delta_r[K \cap \{x : x_1 \leq s - \eta\}] + \epsilon$ . La fonction

envisagée étant croissante, il ne reste plus qu'à faire tendre  $\epsilon$

vers 0 pour obtenir la continuité à gauche.

REMARQUE.- Ce théorème n'est pas valable en toute généralité :

DAVIES et ROGERS [ ] ont construit un exemple de compact métrique  $E$

et de fonction  $h$  tels que  $M^h$  ne prenne que les valeurs 0 et  $+\infty$ ,

avec  $M^h(E) = +\infty$ . Cependant, dans cet exemple,  $E$  est quand même

d'épaisseur  $> 0$ .

Etant donné le théorème 22, on a sous les mêmes hypothèses

28 COROLLAIRE. - Soit A une partie analytique de E telle que  $M^h(A) > 0$ .

Alors A contient un compact K tel que  $0 < M^h(K) < +\infty$

Il n'est pas difficile de voir qu'on a en fait un peu plus :

$M^h(A) = \sup M^h(K)$ , K compact inclus dans A tel que  $0 < M^h(K) < +\infty$ .

Et, finalement, d'après le théorème 26, on a, toujours sous les hypothèses du théorème 27,

29 COROLLAIRE. - Toute partie mince de E est  $\sigma$ -finie pour  $M^h$ .

#### 4.- COMPLÉMENTS

A : CAS TOPOLOGIQUE

On désigne ici par E un espace métrique, pas forcément séparable, et nous nous limiterons aux mesures de Hausdorff classiques: h est une fonction croissante et continue sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $h(t) > 0$  pour  $t > 0$ , et  $\alpha$  est la fonction composée  $h \circ \delta$ ,  $\delta$  désignant toujours le diamètre. Pour h donnée, on définit comme précédemment les mesures extérieures  $M_t^h$ ,  $N_t^h$  pour  $t \in ]0, +\infty]$ , et  $M^h$ , les éléments des recouvrements pouvant être "quelconques", ou fermés, ou même ouverts dans le cas des  $N_t^h$ . La mesure  $M^h$  est encore une mesure de Borel régulière, donc une précapacité, et il n'est pas difficile de voir que les mesures  $N_t^h$  sont "continues à droite" sur les compacts, au sens de la définition 25-c') du chapitre II. Le problème difficile, et crucial pour ce qui nous intéresse, est de savoir si les mesures  $M_t^h$  sont encore des précapacités. La réponse n'est toujours pas connue en toute généralité. Cependant, on doit à

DAVIES [ ] une étude très fine de la question, et, en particulier, une solution positive pour une large classe de couples  $(E, h)$ . Etant donnée la difficulté de la matière, nous nous contenterons de citer le résultat suivant (dû à Davies)

30 THÉORÈME.- Supposons que  $h$  vérifie la condition suivante : il existe une constante  $k$  telle que  $h(3t) \leq k \cdot h(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ . Alors, la mesure  $M_t^h$  est une précapacité pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ .

Dans ces conditions,  $M_\infty^h$  est une capacité continue à droite, et il résulte du théorème de Sion (cf n.27 du chapitre II)

31 COROLLAIRE.- Si  $A$  est analytique au sens de Choquet, on a

$$M^h(A) = \sup M^h(K), \text{ } K \text{ compact inclus dans } A$$

On peut en fait démontrer un résultat bien meilleur : si  $A$  n'est pas  $\sigma$ -fini pour  $M^h$ , alors  $A$  contient un compact lui aussi non  $\sigma$ -fini pour  $M^h$ .

Nous n'avons pas eu le courage de vérifier les détails, mais il est presque certain qu'on peut aussi étendre à ces mesures  $M^h$  le théorème 21, tout au moins si  $E$  est complet et séparable.

B : CAS ABSTRAIT

La notion de mesure du "type Hausdorff" que nous allons définir ici est due à Glivenko, mais là aussi les progrès décisifs sont dûs à DAVIES [ ].

Nous désignons maintenant par  $E$  un ensemble sans structure topologique, et par  $(V_n)$  une suite de parties non vides de  $E$  telle que  $E = \limsup V_n$ . Et, à chaque  $V_n$ , on associe un réel  $\geq 0$  que nous noterons  $\alpha(V_n)$ . Pour tout entier  $k$ , on définit une mesure

extérieure  $M_k$  en posant  $M_k(\emptyset) = 0$ , et, pour  $A$  non vide,  
 $M_k(A) = \inf \sum \alpha(V_{n_i})$ , où  $(V_{n_i})$  est un recouvrement de  $A$  par  
une sous-suite (éventuellement finie) de  $(V_n)$  telle que l'on  
ait  $n_i \gg k$  pour tout  $i$ . Et on définit une mesure du "type Hausdorff"  
en posant  $M = \sup_k M_k = \lim_k M_k$ . Les fonctions  $M_k$  et  $M$  sont des  
mesures extérieures, mais rien ne permet d'affirmer, pour le  
moment, que  $M$  est régulière. On a cependant le théorème suivant,  
dont la démonstration ressemble beaucoup à celle du théorème 16,  
mais est plus simple et plus "lumineuse",

32 THÉORÈME.- Si la mesure  $M$  est une précapacité, alors la mesure  $M_k$   
est aussi une précapacité pour tout entier  $k$ .

La mesure  $M$  est une précapacité si elle est régulière : voici  
une condition suffisante (mais non évidente) pour qu'il en soit  
ainsi

33 THÉORÈME.- Pour que la mesure  $M$  soit régulière, il suffit que  
la suite  $(V_n)$  satisfasse les trois conditions suivantes

- a) soient  $x \in E$  et  $m$  un entier : si  $x$  n'appartient pas à  $V_m$ ,  
il existe un entier  $n$  tel que  $x \in V_n$  et  $V_n \cap V_m = \emptyset$
- b) soient deux entiers  $m$  et  $n$  tels que  $V_m \cap V_n = \emptyset$ . Il existe alors  
un entier  $p_0$  tel que  $V_p \cap V_m$  ou  $V_p \cap V_n$  soit vide pour tout  $p \geq p_0$
- c) soient deux entiers  $m$  et  $n$  tels que  $V_m \cap V_n = \emptyset$ . Il existe alors  
une sous-suite finie, dont les éléments rencontrent  $V_n$  mais non  $V_m$ ,  
et dont la réunion est un recouvrement de tout élément de la suite  
rencontrant  $V_n$  mais non  $V_m$ .

Enfin, il est intéressant de noter qu'on peut montrer assez facile-  
ment (cf DAVIES [ ]) que les mesures  $M^\alpha$  considérées au paragraphe 2  
sont du "type Hausdorff", les  $(V_n)$  étant alors une suite de compacts  
satisfaisant les conditions du théorème précédent.